

Title	Sufficiency and Approximate Sufficiencyについて (Invariant Statistical ProblemsとSufficiency)
Author(s)	橋本, 勲
Citation	数理解析研究所講究録 (1968), 46: 1-14
Issue Date	1968-05
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/107700">http://hdl.handle.net/2433/107700</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

# Sufficiency and Approximate Sufficiency

について

阪大 理 橋本 勲

§ 1. 序. LeCam, L. (1964) A.M.S. 35 の紹介である。その中で特に二つの実験の比較と部分実験の十分性について記す。従来の実験  $\{X, \Omega, \mathcal{P}\}$  より弱い構造  $\{X, E, \mathcal{P}\}$  で実験を定義する。それによって十分性の定義などにおける測度論的困難さを除去することができる。実験の比較において Blackwell - Sherman - Stein の定理を含む定理を得ている。部分実験の十分性において Halmos and Savage の十分性の定義と Blackwell の十分性の定義とが同等であることを示している。最後に二・三の注意を述べる。

§ 2. 実験とそれに関連した空間。

定義 1. 実験  $\alpha = \{\Theta, E, X, \{P_\theta\}\}$  とは  $\Theta$  はある集合,  $E$  はある集合  $X$  の上の有界実数値関数のある集合として  $\forall \theta \in \Theta$  に  $E$  の上で定義された実数値関数  $P_\theta$  を対応させる対応  $\theta \rightarrow P_\theta$  とから成る。さらに  $\alpha$  は次の要請を満足すると仮定する。

(i)  $E$  は  $f, g \in E$  に対し  $f \geq g$  を  $\forall x \in X, f(x) \geq g(x)$  と定義

し、この順序  $\leq$  によってベクトル束である。

(ii)  $\exists I \in E; \forall x \in X, I(x) = 1$ .

(iii)  $\forall P_0$  は正値 normalized 線形汎関数である。(正値とは  $\forall f \in E$  に対し  $f^+ P_0 \geq 0$  となること。ここで  $f^+ = f \vee 0$  である。

normalized とは  $I P_0 = 1$  となること。 $f P_0$  は  $f \in E$  での  $P_0$  の値を示し、 $f P_0 = \int f(x) P_0(dx)$  と考えてよい。)

(iv)  $E$  はノルム  $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$  に関して完備である。

$E$  をベクトル束とする。 $E$  の区間  $[f, g]$  は  $\{h; h \in E, f \leq h \leq g\}$  である。 $E$  の上で定義された線形汎関数が  $E$  の区間を  $\mathbb{R}$  の有界集合の中へ写すとき order bounded であるという。

$E^* = \{E \text{ の上の order bounded 線形汎関数}\}$  とし、 $E^*$  を  $E$  の Riesz dual という。 $E^* \supset \{P_0; 0 \in \mathbb{Q}\}$  である。

ベクトル束  $E$  は  $E$  のあらゆる有界集合  $S$  が  $E$  の中に  $\sup S$  をもつならば order complete であるといわれる。Riesz dual  $E^*$  は常に order complete である。

$f^+ = f \vee 0$ ,  $f^- = (-f) \vee 0$  とし  $|f| = f^+ + f^-$  とする。 $f, g \in E$ ;  $|f| \wedge |g| = 0$  ならば、 $f$  と  $g$  とは disjoint であるという。 $f^+$  と  $f^-$  とは disjoint である。

$E$  を order complete ベクトル束とする。 $E$  の線形部分空間  $F$  は  $F$  と違う  $E$  の線形部分空間  $F'$  が存在し

(i)  $\forall f \in F, \forall g \in F'$  に対し、 $|f| \wedge |g| = 0$ ,

$$(ii) E \ni \forall v \geq 0, F \ni \exists f \geq 0, F' \ni \exists g \geq 0, v = f + g,$$

となるとき band という。bands の共通部分はまだ band である。

定義 2. 実験  $\alpha$  により定義される空間  $L = L(\alpha)$  とは  $\{p_0\}$  を含む  $E^*$  の最小の band である。

$E^*$  の順序は  $Q \in E^*$  が  $Q \geq 0$  であることを  $\forall f \in E$  に対し  $f^+ Q \geq 0$  と意味することにより定義される。  $L \subset E^*$  であるから、 $L$  の順序は  $E^*$  の順序で入ることが出来る。この順序で  $L$  はベクトル束である。

定義 3. 実験  $\alpha$  により定義される空間  $M = M(\alpha)$  とは  $L(\alpha)$  の Riesz dual  $L^*(\alpha)$  である。

$f, g \in E$  に対し、積  $f \cdot g$  を  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in X$  で定義する。この積に関して  $E$  は環になる。

$f, g \in E$  に対し  $f \sim g$  を  $\forall \lambda \in L, (f - g)\lambda = 0$  と意味する。 $\sim$  は同値関係になる。 $\dot{E} = E/\sim$  とする。 $\dot{E}$  は  $M$  に imbed される。従って  $E$  の積を  $M$  に移すことが出来る。正確に、

命題 1.  $\exists$  one and only one bilinear map  $(u, v) \rightarrow uv$  of  $M \times M$  into  $M$ :

$$(i) I u = u I = u,$$

$$(ii) u^+ v^+ \geq 0.$$

命題 2.  $Z = \{ \varphi \in M^*; \varphi > 0, (uv)\varphi = (u\varphi)(v\varphi), u, v \in M \},$

$C(Z) = \{Z \text{ 上の連続実数値関数}\}$  とする。そのとき  $M$  と  $C(Z)$  とは同型である。

### § 3. ランダム写像とそれらの一般化.

$\mathcal{X}$  と  $\mathcal{Y}$  とは二つの集合とする。  $E$  (または  $F$ ) を  $\mathcal{X}$  (または  $\mathcal{Y}$ ) の上の有界実数値関数の作るベクトル束とする。束とベクトルの演算は各点毎に定義された通常の演算でありとして  $E$  は  $\mathcal{X}$  の上の一様収束位相に関して完備である。さらに  $\forall x \in \mathcal{X}, I(x) = 1$  となる  $I \in E$  とする。  $F$  も  $\mathcal{Y}$  の上で同じ要請を満足するとする。

$F$  上の expectation とは  $F$  の上の正值 *normalized* 線形汎関数である。 expectation  $P$  は  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \mathcal{Y}$  と対応する実数  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  が存在し  $\forall f \in F$  に対し  $fP = \sum_{j=1}^n p_j f(y_j)$  となるとき 有限な台をもつ expectation といわれる。

定義 4.  $\{\mathcal{X}, E\}$  から  $\{\mathcal{Y}, F\}$  への *special* ランダム写像  $D$  は次の三つの条件を満足する  $\mathcal{X}$  の上で定義された対応:  $x \rightarrow D_x$  である。

- (i)  $D_x$  は  $F$  の上の expectation である。
- (ii)  $\forall f \in F, x \rightarrow fD_x$  なる  $fD$  は  $E$  の元である。
- (iii)  $\forall x \in \mathcal{X}, D_x$  は  $\mathcal{Y}$  上有限な台をもつ。

$\forall x \in \mathcal{X}$  に対し  $D_x$  の台を含む  $x$  と無関係な有限集合が存在するならば *special* ランダム写像は restricted であるという。

$\forall x \in X$  に対し  $D_x$  の台が  $\mathcal{Y}$  の一点であるとき  $D$  を ランダム 写像であるという.

$D$  が special ランダム写像であれば,  $(f, \lambda) \in F \times L(\alpha)$  に実数  $f D \lambda (= \int f D_x \lambda(dx))$  を対応させる関数は正值 *normalized* 双線形である. すなわち

$$(i) f^+ D \lambda^+ \geq 0,$$

$$(ii) J D \lambda^+ = \|\lambda^+\|, \text{ ただし } J \text{ は } \forall y \in \mathcal{Y}, J(y) = 1 \text{ である. } \|\lambda\| = \sup \{ |f \lambda|; f \in E, |f| \leq 1 \}.$$

定義 5.  $\alpha$  から  $\{\mathcal{Y}, F\}$  へのランダム写像は  $F \times L(\alpha)$  の上の正值 *normalized* 双線形関数である.

各 special ランダム写像はランダム写像も定義する.

空間  $L(\alpha)$  はノルム  $\|\lambda\| = \sup \{ |f \lambda|; f \in E, |f| \leq 1 \}$  に関してバナッハ空間である. また空間  $F$  もノルム  $\|f\| = \sup \{ |f(y)|; y \in \mathcal{Y} \}$  に関してバナッハ空間である. 他方,  $L(\alpha)$  も  $F$  も汎弱位相をもつ. 従って  $F \times L(\alpha)$  において (i)  $A$  が  $F$  において強閉でありかつ  $B$  が  $L(\alpha)$  において弱閉である. または (ii)  $A$  が  $F$  において弱閉でありかつ  $B$  が  $L(\alpha)$  において強閉であるような矩形  $A \times B$  を考えることができる.

定理 1.  $\mathcal{M} = \{ F \times L(\alpha) \text{ 上の正值 } \textit{normalized} \text{ 双線形関数} \}$ ,  $\mathcal{M}_r = \{ \alpha \text{ から } \{\mathcal{Y}, F\} \text{ への } \textit{restricted special} \text{ ランダム写像} \}$  とする.  $\mathcal{M}_r$  は  $A \times B$  上の一様収束位相に対し  $\mathcal{M}$  において稠密

である。

#### § 4. approximate な十分性.

$\alpha = \{\Theta, E, \mathcal{F}, \{P_0\}\}$  を実験とする.  $\{T, C\}$  を決定の集合  $T$  と  $T$  の上の有界実数値関数の作るベクトル束  $C$  から成る組とする.  $C$  は constant 関数を含むとする.  $\Theta \times T$  の上で定義された実数値損失関数  $W$  は与えられている.  $(\theta, t) \in \Theta \times T$  での  $W$  の値を  $W_\theta^t$  で示す. 関数  $t \rightarrow W_\theta^t$  を  $W_\theta$  で示す.  $\|W\| = \sup\{|W_\theta^t|; \theta \in \Theta, t \in T\}$  とする.  $\forall \theta \in \Theta$  に対し  $W_\theta \in C$ , かつ  $\|W\| < \infty$  と仮定する.

$\alpha$  から  $\{T, C\}$  への special decision procedure  $\rho$  は定義 4 の  $D$  に対応する. そのとき  $F$  の代りに  $C$  を考える. リスクは

$$R(\theta, \rho) = \int \left\{ \int W_\theta^t \rho_x(dt) \right\} P_0(dx)$$

によって与えられる.

$\alpha$  から  $\{T, C\}$  への decision procedure は定義 5 に対応する. すなわち  $C \times L(\alpha)$  の上の正值 normalized 双線形関数である. リスクは  $R(\theta, \rho) = W_\theta \rho P_0$  と書く.

decision procedures の全体を  $\mathcal{D}$  とし,  $\mathcal{D}$  に  $C \times L(\alpha)$  の上の各点毎収束位相を入れると  $\mathcal{D}$  は凸コンパクト・ハウスドルフ空間である.

$\hat{\Theta}$  を  $\Theta$  上有限な台をもつ確率測度の全体とする.

定義 6.  $\alpha = \{\Theta, E, \mathcal{F}, \{P_0\}\}$  と  $\beta = \{\Theta, F, \mathcal{G}, \{Q_0\}\}$  を同じパラメ

$\theta$ -空間  $\Theta$  をもつ二つの実験とする.  $\varepsilon$  を  $\Theta$  上で定義された非負値関数とする.  $\alpha$  が  $\beta$  に対して  $\varepsilon$ -deficient であるとは任意の decision space  $\{T, C, W\}$  と任意の  $\beta$  から  $\{T, C\}$  への special decision procedure  $\sigma$  に対し  $\alpha$  から  $\{T, C\}$  への decision procedure  $\rho$  が存在し任意の  $\mu \in \tilde{\Theta}$  に対し

$$\int W_0 \rho P_0 \mu(d\theta) \leq \int W_0 \sigma Q_0 \mu(d\theta) + \|W\| \int \varepsilon(\theta) \mu(d\theta)$$

(または同値的に, 任意の  $\theta \in \Theta$  に対し

$$W_0 \rho P_0 \leq W_0 \sigma Q_0 + \|W\| \varepsilon(\theta).)$$

となることである.

$t \in T$  の選択にはリスクの値にのみ関係しているから loss 関数  $W^t$  の選択と同等である. 仮定から  $W$  が有界であるから一般性を失わずに  $|W_0^t| \leq 1$  としよ.  $\mathcal{S}$  を  $\Theta$  から  $[-1, +1]$  への関数の全体とする.  $\mathcal{S}$  は  $\Theta$  上の各点毎に東位相に対しコンパクト・ハウスドルフ空間である.  $\mathcal{C}$  を  $\mathcal{S}$  の上の連続実数値関数の空間とする.  $W$  を  $\Theta \times \mathcal{S}$  上で定義された関数とする. decision space  $\{T, C, W\}$  を  $TC\mathcal{S}$  とする.

補題.  $\mu \in \tilde{\Theta}$  とする.  $\sigma$  を  $\beta$  から  $\{T, C, W\}$  へのノンランダム decision procedure とする.  $T$  は対応:  $\gamma \rightarrow \sigma_\gamma$  の strict 値域とする. そのとき,  $\alpha$  から  $\{T, C, W\}$  への decision procedure  $\rho$  が存在し

$$\int W_0 \rho P_0 \mu(d\theta) < \int W_0 \sigma Q_0 \mu(d\theta) + \varepsilon$$



となるための必要十分条件は  $\alpha$  から  $\beta$  への special ランダム写像  $M$  が存在し

$$\int (W_0 \circ) M P_0 \mu(d\theta) < \int W_0 \circ Q_0 \mu(d\theta) + \varepsilon$$

となることである。

証明. 必要であること.  $\mu \in \tilde{\mathcal{H}}$  であるから定理 1 によって special restricted decision procedure  $P$  が存在し  $\int W_0 P P_0 \mu(d\theta) < \int W_0 \circ Q_0 \mu(d\theta) + \varepsilon$  となる.  $P$  が restricted であるから,  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset T$  と  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset E$  が存在し  $P$  は対応:  $x \rightarrow \sum_{j=1}^n u_j(x) \delta_{s_j}$ , ただし  $\delta_s$  は  $s \in T$  に大きさ 1 を与える確率測度, である.  $T$  が対応:  $y \rightarrow \sigma_y$  の strict な値域であるから,  $\forall s_j$  に対し  $\exists y_j \in \mathcal{Y}$  且  $s_j = \sigma_{y_j}$ .  $M$  を  $x \rightarrow \sum u_j(x) \delta_{y_j}$  とすれば,  $M$  は  $\alpha$  から  $\beta$  への restricted special decision procedure でありかつ  $P = \circ M$  である. 十分であること.  $\circ M$  が  $\alpha$  から  $\{T, C\}$  への special decision procedure であるから, それを  $P$  とすればよい. (終)

定理 2. 次の (1) ~ (3) の命題は同等である.

(1)  $\alpha$  から  $\beta$  への ランダム写像  $M$  が存在し  $\forall \theta \in \mathcal{H}$  に対し  $\|M P_\theta - Q_\theta\| \leq \varepsilon(\theta)$  となる.

(2)  $\alpha$  は  $\beta$  に対し  $\varepsilon$ -deficient である.

(3)  $\mathcal{L}(\alpha)$  から  $\mathcal{L}(\beta)$  の中への線形写像  $M$  が存在し (i)  $\forall \lambda \in \mathcal{L}(\alpha)$  に対し  $\|M \lambda^+ \| = \| \lambda^+ \|$ , (ii)  $\forall \theta \in \mathcal{H}$  に対し  $\|M P_\theta - Q_\theta\| \leq \varepsilon(\theta)$  となる.

証明. (1)  $\Rightarrow$  (2):  $\|MP_0 - Q_0\| \leq \varepsilon(0)$  から,  $\forall \varphi \in F, |\varphi| \leq J$  に対し  
 $|\varphi MP_0 - \varphi Q_0| \leq \varepsilon(0)$ .  $\varphi = \frac{W_0}{\|W\|} \sigma$  かつ  $P = \sigma M$  とすれば,  $W_0 P P_0$   
 $\leq W_0 \sigma P_0 + \|W\| \cdot \varepsilon(0)$ . (2)  $\Rightarrow$  (1):  $\beta$  から  $\{T, C\}$  への special deci-  
 sion procedure  $\sigma$  に対し  $\sigma': y \rightarrow \sum t_i \sigma_y(t_i)$  とすれば  $\sigma'$  はノ  
 ランダムでかつ  $W_0 \in C$  であるから  $\forall \theta \in \mathcal{H}$  に対し  $W_0 \sigma = W_0 \sigma'$ .

補題 1 から  $\alpha$  から  $\beta$  への special ランダム写像が存在し  $\forall \theta$   
 に対し  $W_0 \sigma' M P_0 \leq W_0 \sigma' Q_0 + \|W\| \varepsilon(0)$ . 従って  $\forall \theta$  に対し

$$\frac{W_0}{\|W\|} \sigma' (M P_0 - Q_0) \leq \varepsilon(0). \text{ 一般に } \forall \delta \in (0, 1), \forall \theta \in \mathcal{H}, \exists \varphi_\theta \in F, |\varphi_\theta|$$

$$\leq J: \varphi_\theta (M P_0 - Q_0) \geq (1 - \delta) \|M P_0 - Q_0\|. \text{ 故に } (1 - \delta) \|M P_0 - Q_0\|$$

$$\leq \varepsilon(0). \delta \text{ が任意であるから } \|M P_0 - Q_0\| \leq \varepsilon(0). (1) \Rightarrow (3): F^*$$

を  $F$  の Riesz dual とする.  $\angle(\beta)$  が  $F^*$  の band であるから  $G$  が

存在し  $F^* = \angle(\beta) + G$  (直和) と書ける.  $\pi$  と  $\pi' (= I - \pi)$  をそれぞ

れ  $F^*$  から  $\angle(\beta)$  と  $G$  の上への射影とする.  $\|M P_0 - Q_0\| = \|\pi M P_0$

$$- Q_0\| + \|\pi' M P_0\| \leq \varepsilon(0). \|\pi' M P_0\| = \|M P_0\| - \|\pi M P_0\| = \|P_0\| -$$

$$\|\pi M P_0\|. \lambda \in \angle(\beta) \Rightarrow \lambda \geq 0, \|\lambda\| = 1 \text{ とする. } \forall \nu \geq 0, \nu \in \angle(\alpha)$$

に対し  $M_1 \nu = \pi M \nu + (\|\nu\| - \|\pi M \nu\|) \lambda$  とする.  $M_1$  は  $\angle(\alpha)$  全体

へ拡張されかつ (3) の (i), (ii) を満たす. (3)  $\Rightarrow$  (1) は明らか. (終)

定義 7.  $\alpha$  と  $\beta$  とを実験とする.  $\beta$  に対する  $\alpha$  の deficiency  
 は数

$$\delta(\alpha, \beta) = \inf_{M \in \mathcal{M}} \sup_{\theta \in \mathcal{H}} \|M P_0 - Q_0\|,$$

$M$  は  $\angle(\alpha)$  から  $\angle(\beta)$  への定理 2 (3) の条件を満たす写像の全てを

動く, である. 定理 2 から定義 6 と定義 7 とは同等である.

$\sigma(\alpha, \beta) + \sigma(\beta, \alpha) = \Delta(\alpha, \beta)$  は実験の class の上に pseudo metric を定義する.  $\Delta(\alpha, \beta) = 0$  ならば二つの実験  $\alpha$  と  $\beta$  とは同等であるという.

定理 3. 次の (1) ~ (3) は同等である.

(1)  $\sigma(\alpha, \beta) = 0$ .

(2)  $\angle(\alpha)$  から  $\angle(\beta)$  への正值線形写像  $D$  が存在し  $\forall \theta \in \mathbb{H}$  に対し  $DP_\theta = Q_\theta$  である.

(3)  $M(\beta)$  から  $M(\alpha)$  への正值線形写像  $D$  が存在し  $JD = J$  かつ  $\forall u \in M(\beta), \forall \theta \in \mathbb{H}$  に対し  $(uD)P_\theta = uQ_\theta$  である.

証明. (1) と (2) とが同等であることは定理 2 から出る. (2) と (3) とが同等であることは (2) の  $D$  と (3) の  $D$  とが adjoint であることから出る. (終)

§ 5. 十分性.

定義 8.  $\beta = \{\mathbb{H}, F, \varphi, \{Q_\theta\}\}$ ,  $\angle = \angle(\beta)$  とし  $M = M(\beta)$  とする.  $\alpha$  が  $\beta$  の部分実験であるとは  $\alpha = \{H, \{P_\theta; \theta \in \mathbb{H}\}\}$ ,  $H$  は  $M$  の恒等元  $I$  を含む  $w(M, \angle)$  closed 線形部分束であり,  $\{P_\theta\}$  は  $\{Q_\theta\}$  の  $H$  への制限, である.  $w(M, \angle)$  は  $\angle$  により  $M$  に導入された弱位相である. すなわち,  $f_0 \in M$  の近傍  $U$  は  $U_{n, \varepsilon}(f_0) = \{f \in M; |\lambda_i f_0 - \lambda_i f| < \varepsilon, \lambda_i \in \angle, i = 1, 2, \dots, n\}$  である.

命題 3.  $M_1 \subseteq M$  の線形部分空間とする.  $D$  と  $ID = I$  かつ  $\forall \theta$

$\in \mathcal{H}$ ,  $\forall v \in M$  に対し  $(vD)Q_0 = vQ_0$  となる  $M$  から  $M_1$  の中への  
正値線形写像とする. そのとき  $M$  から  $M_1$  の部分集合  $H$  の上へ  
の正値線形射影  $\pi$  が存在し

- (1)  $I\pi = I$  かつ  $\forall \theta \in \mathcal{H}$ ,  $\forall v \in M$  に対し  $v\pi Q_0 = vQ_0$ .
- (2)  $H = M\pi$  は  $w(M, L)$  位相に対し  $M$  における閉集合である.
- (3)  $H$  は  $M$  の真部分束かつ部分環である. さらに  $\forall u \in H$ ,  $\forall v \in M$  に対し  $(v\pi)u = (vu)\pi$ .
- (4)  $\pi$  は  $H$  により一意にきまる.

略証.  $D$  を仮定された性質をもつ写像とする.  $D^n$  と  $D_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D^k$  も同じ性質をもつ. 列  $\{D_n\}$  は  $M \times L$  上の各点収束の位相に關してコンパクトであり, 従って少なくとも一つの cluster 点  $\pi$  をもつ. すなわち,  $\pi = \lim D_n$ .  $D\pi = \pi D = \pi$  であり, 命題の要請も満足する. (終)

定義 9.  $\beta$  を実験とする.  $M(\beta)$  の closed subalgebra  $H$  が十分であるとは  $M(\beta)$  から  $H$  の上への正値線形射影  $\pi$  が存在して  $I\pi = I$  かつ  $\forall \theta \in \mathcal{H}$ ,  $\forall v \in M(\beta)$  に対し  $(v\pi)Q_0 = vQ_0$  となるときである.

命題 4.  $\mathcal{K}$  を  $M(\beta)$  の十分な closed subalgebras の全体とする.  $\mathcal{K}$  は一つの最小元をもつ.

命題 5. pairwise な十分性と十分性とは同等である.

命題 6.  $H$  が十分な環  $H_1$  を含む閉じた環であれば,  $H$  は十

分である。

$\beta$  を実験とし,  $H$  を  $M(\beta)$  の最小十分な部分環とする.  $\{\Theta, H, \{Q_0\}\}$  を  $\beta$  の minimal equivalent form という. 実際,  $\alpha = \{\Theta, H, \{Q_0\}\}$  とすれば,  $\Delta(\alpha, \beta) = 0$  である.

命題 7.  $\alpha = \{\Theta, E, \mathcal{E}, \{P_0\}\}$  と  $\beta = \{\Theta, F, \mathcal{F}, \{Q_0\}\}$  を  $\alpha$  の実験とする.  $\alpha' = \{\Theta, G, \{P_0\}\}$  と  $\beta' = \{\Theta, H, \{Q_0\}\}$  をそれぞれの minimal equivalent form とする.  $\Delta(\alpha, \beta) = 0$  である必要十分条件は対応:  $P_0 \leftrightarrow Q_0$  が  $\angle(\alpha)$  の正の元を  $\angle(\beta)$  の正の元に写す対応が  $\angle(\alpha)$  から  $\angle(\beta)$  への同型対応にまで拡張できるとである.

§ 6. Halmos and Savage の十分とここで定義された十分との関係.

$Z$  は命題 2 に定義された集合である.  $Z \times \Theta$  を考える.  $Z$  上に  $C(Z)$  の元を可測にさせる最小の  $\sigma$ -field  $\mathcal{U}$  を与える.  $\mathcal{C}$  を  $H$  により生成された  $\sigma$ -field とする.  $\mathcal{C}$  を  $\Theta$  上の関数  $\theta \mapsto u P_\theta$ ,  $u \in C(Z) = M$  が可測となる  $\Theta$  の部分集合から成る最小の  $\sigma$ -field とする.

$\mu$  を  $\mathcal{C}$  上の任意の  $\sigma$ -additive 確率測度とする.  $Q * \mu$  を次の式により  $\mathcal{U} \times \mathcal{C}$  上に定義された確率測度とする.

$$g[Q * \mu] = \int [f Q_0] \gamma(\theta) \mu(d\theta),$$

ただし  $g = f \gamma$ ,  $f \in M$ ,  $\gamma$ : 有界  $\mathcal{C}$ -可測関数.

$\mathcal{U} = \mathcal{U} \times \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B} \times \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{Z} \times \mathcal{C}$  という記号を用いる.

$P = Q * \mu$  は  $\{\mathcal{Z} \times \mathcal{H}, \mathcal{U} \times \mathcal{C}\}$  上の確率変数  $z$  と  $\theta$  との同時分布である.

$H$  (あるいは  $\mathcal{B}$ ) を与えたとき確率変数  $z$  が  $\theta$  と無関係であるとは  $A \in \mathcal{U}$  ならば  $P[A|\mathcal{B}|\mathcal{C}] = P[A|\mathcal{B}]$  a.e. となることである. 条件付期待値を用いてそれは次のように書ける.  $u \in M$  ならば  $\int E[u|\mathcal{B}] f \delta dP = \int u f \delta dP$  for  $\forall$  bounded  $\mathcal{B}$ - $\mathcal{C}$ -measurable  $f$  と  $\forall$  bounded  $\mathcal{B}$ -measurable  $\delta$ .

$H$  が定義 9 の意味で十分とすると,  $M$  から  $H$  の上への射影  $\pi$  が存在し  $\forall u \in H, \forall v \in M$  に対し  $(uv)\pi = (v\pi)u$  となる. 従って,  $(v\pi)u Q_0 = (vu)Q_0$ . これから任意の  $\mathcal{C}$  上の確率測度  $\mu$  と任意の有界  $\mathcal{C}$ -可測関数  $\delta$  に対し  $\int (v\pi)u Q_0 \delta(\theta) \mu(d\theta) = \int (vu)Q_0 \delta(\theta) \mu(d\theta)$  が出る.  $P$  の定義から  $u \delta dP = u Q_0 \delta \mu(d\theta)$  であり,  $v\pi = E[v|\mathcal{B}]$  とすれば,  $\int E[v|\mathcal{B}] u \delta dP = \int v u \delta dP$  となる. すなわち  $H$  を与えたとき  $z$  と  $\theta$  と独立である.

逆に,  $u \in M$  ならば  $\int E[u|\mathcal{B}] f \delta dP = \int u f \delta dP$  とする. そのとき,  $\pi: u \rightarrow E[u|\mathcal{B}]$  とすれば  $\pi$  は要求される性質をもつ.

## §7. 二・三の注意.

1).  $\sigma$ -完備なベクトル束と  $\sigma$ -field との濃度は等しい. 工藤弘吉教授により証明が与えられた.

2) Blackwell, D. (1951): Comparison of experiments では有限個の測度を取扱っているが LeCam の方法を用いて拡張 ( $\mathcal{P}_0: \mathcal{D} \in \mathcal{D}$ ) への ) は可能である. Morse, N. and Sacksteder, R. (1966): Statistical isomorphism はこの事実に近いことを行っているようだ.

3) 2) と LeCam の結果の対応をはっきりさせるためには定義 5 のランダム写像と  $T(E; x)$ ,  $E \in \mathcal{B}$ ,  $x \in \mathcal{X}$  との対応 (表現) を考えることが必要である. それには Farrell, R. H. (1967): Weak limits of sequences of Bayes procedures in estimation theory の appendix が参考になる.

4) LeCam の十分はノルム環の部分環として定義されているから, ノルム環の理論を用いてもっともっきり十分を定義できると思っている.

LeCam の論文を読むのに草間時武先生にお世話になった.